

ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ, ЧАСТКОВО ЗАПОВНЕНИХ РІДИНОЮ

А. О. Караєв^{1, а}, Є. О. Караєва¹, О. О. Стрельнікова^{1,2}

¹Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

²Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України

Анотація

У наведеному дослідженні представлено спосіб обчислення власних мод і власних частот коливань для оболонок обертання, частково заповнених рідиною. У наближенні ідеальної нестисненої рідини для потенціала швидкості виконується рівняння Лапласа. Задача розв'язується у вигляді суперпозиції стаціонарних станів, коефіцієнти розкладання за якими шукаються із початкових умов. Досліджено сходимість та запропоновано спосіб обчислення сингулярних інтегралів з логарифмічною вагою, які представляють собою діагональні елементи матриці результуючого рівняння. Чисельні результати показали гарну сходимість з аналітичним рішенням для циліндра.

Ключові слова: оболонка обертання, теорія потенціалу, еліптичні інтеграли, стаціонарні стани

Вступ

Оболонки обертання широко застосовуються в різноманітних задачах техніки та промисловості, таких як дослідження міцності резервуарів для зберігання нафти, аналіз плескань рідини в паливних баках ракетноносіїв, стійкість контейнерів для транспортування зрідженого газу тощо. Цим дослідженням присвячені роботи [1, 2, 3].

Складні профілі коливання потребують створення стійких чисельних схем для дослідження власних частот і власних мод коливання рідини в об'єкті, оскільки аналітичні розв'язки існують тільки для обмеженої кількості простих форм обертання, таких як циліндрична, сферична та конічна.

У наведеному дослідженні для аналізу власних частот та мод коливань використовується метод граничних елементів. Окремі труднощі виникають при обчисленні діагональних елементів матриці системи лінійних алгебраїчних рівнянь, оскільки вони є сингулярними інтегралами.

1. Постановка задачі

Нехай рідина частково заповнює оболонку обертання (рис. 1). Нехай S_0 – вільна поверхня рідини, а S_1 – бокові стінки. Нехай рідина є нев'язкою, нестислою та потік рідини є потенційним. У такому випадку швидкість \vec{v} рідини можна представити за допомогою потенціалу $\vec{v} = \nabla\varphi$, який задовільняє рівнянню Лапласа

$$\Delta\varphi = 0. \quad (1)$$

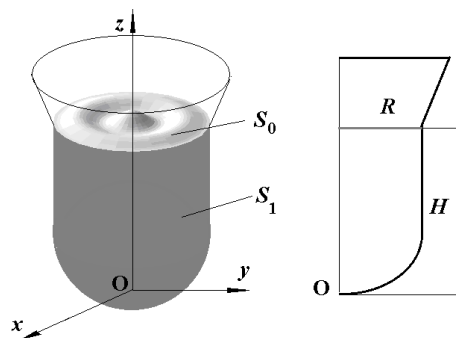


Рис. 1. Оболонка обертання та її переріз

Гранична умова на боковій стінці є звичайною умовою неприлипання

$$\left. \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right|_{S_1} = 0, \quad (2)$$

де n – нормаль до поверхні.

На вільній поверхні виконуються кінематична умова та рівняння Бернуллі [4]

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right|_{S_0} = \frac{\partial\zeta}{\partial t} \\ \left. \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right|_{S_0} + g\zeta(\rho, t) = 0 \end{cases}, \quad (3)$$

де $\zeta(\rho, t)$ – рівняння, що описує вільну поверхню коливання.

2. Стаціонарні стани

Для пошуку стаціонарних станів системи розділимо потенціал швидкості на часову та просторову функції:

$$\varphi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r})e^{i\omega t}. \quad (4)$$

^аa.karaiev@karazin.ua

Використовуючи отриману заміну, система рівнянь (3) перетворюється на наступну

$$\begin{cases} \Delta\psi = 0 \\ \left. \frac{\partial\psi}{\partial n} \right|_{S_0} = \frac{\omega^2}{g}\psi(\vec{r}) \\ \left. \frac{\partial\psi}{\partial n} \right|_{S_1} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Отримана система рівнянь має розв'язок у вигляді спектру власних векторів та власних частот. Оскільки кожен із власних векторів є розв'язком системи (5), потенціал швидкості може бути розкладений в базисі власних векторів:

$$\varphi(\vec{r}, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \varphi_i(\vec{r}, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \psi_i(\vec{r}) e^{i\omega_i t}. \quad (6)$$

Вираз для вільної поверхні отримаємо з рівняння Бернуллі, використовуючи розкладення (6):

$$\begin{aligned} \zeta(\rho, t) &= -\frac{1}{g} \left. \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right|_{z=\zeta(\rho, t)} = \\ &= -\frac{i}{g} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \omega_i \varphi_i(\rho, \zeta(\rho, t), t). \end{aligned} \quad (7)$$

Отримана залежність є нелінійною, але у випадку малих коливань вона може бути розкладена у ряд до членів відхилення першого порядку. Тоді вираз для рівняння вільної поверхні є наступним:

$$\zeta(\rho, t) = H - \frac{gH + i \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \omega_i \varphi_i(\rho, H, t)}{g + i \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \omega_i \left. \frac{\partial\varphi_i}{\partial n} \right|_{z=H}}. \quad (8)$$

Невідомі коефіцієнти α_i знаходяться із початкових умов.

3. Задача власних векторів і власних значень

Як відомо з теорії потенціалу, будь-яка гармонічна функція задовільняє третій тотожності Гріна:

$$\begin{aligned} 4\pi C(\vec{\xi})\psi(\vec{\xi}) + \oint_S \psi(\vec{r}) q^*(\vec{\xi}, \vec{r}) dS(\vec{r}) = \\ = \oint_S \frac{\partial\psi(\vec{r})}{\partial n} u^*(\vec{\xi}, \vec{r}) dS(\vec{r}), \end{aligned} \quad (9)$$

де $C(\vec{\xi}) = \int_V \delta(\vec{r} - \vec{\xi}) dV$, $u^*(\vec{\xi}, \vec{r}) = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{\xi}|}$ – функція Гріна рівняння Лапласа, $q^*(\vec{\xi}, \vec{r}) = \frac{\partial u^*(\vec{\xi}, \vec{r})}{\partial n}$ – нормальна похідна від функції Гріна.

Тепер розділимо поверхню на N граничних елементів, на кожному з яких оберемо фіксовану точку \vec{r}_i , $\vec{r}_i \in N_i$, m з яких знаходяться на вільній поверхні, а решта $N - m$ – на бокових стінках. Тоді, користуючись власністю аддитивності інтеграла, теоремою

Коші про середнє значення та граничними умовами, отримаємо:

$$\begin{aligned} 2\pi\psi(\vec{r}_k) + \sum_{i=1}^m \psi(\vec{r}_i) \int_{S_i} q^*(\vec{r}_k, \vec{r}) dS + \\ + \sum_{i=m+1}^N \psi(\vec{r}_i) \int_{S_i} q^*(\vec{r}_k, \vec{r}) dS = \\ = \frac{\omega^2}{g} \sum_{i=1}^m \frac{\partial\psi(\vec{r}_i)}{\partial n} \int_{S_i} u^*(\vec{r}_k, \vec{r}) dS. \end{aligned} \quad (10)$$

Нехай $\psi_{0k} = \psi(\vec{r}_k)$, $\vec{r}_k \in S_0$ та $\psi_{1k} = \psi(\vec{r}_k)$, $\vec{r}_k \in S_1$. Тоді, використовуючи рівняння (10) для точок на бокових стінках, можна виразити ψ_{1k} через ψ_{0k} :

$$(2\pi\delta_{ik} + Q_{ik}^{*11}) \psi_{1k} = \left(\frac{\omega^2}{g} U_{ik}^{*10} - Q_{ik}^{*10} \right) \psi_{0k}. \quad (11)$$

Вирази для матриць $Q_{ik}^{\alpha\beta}$ та $U_{ik}^{\alpha\beta}$ наступні

$$\begin{cases} Q_{ik}^{\alpha\beta} = \int_{S_k} q^*(\vec{r}_i, \vec{r}) dS(\vec{r}) \\ U_{ik}^{\alpha\beta} = \int_{S_k} u^*(\vec{r}_i, \vec{r}) dS(\vec{r}) \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = 0, \beta = 0 \Rightarrow \vec{r}_i \in S_0, S_k \in S_0 \\ \alpha = 0, \beta = 1 \Rightarrow \vec{r}_i \in S_0, S_k \in S_1 \\ \alpha = 1, \beta = 0 \Rightarrow \vec{r}_i \in S_1, S_k \in S_0 \\ \alpha = 1, \beta = 1 \Rightarrow \vec{r}_i \in S_1, S_k \in S_1 \end{cases} \quad (12)$$

Рівняння для визначення власних частот і власних векторів

$$\begin{aligned} (2\pi\delta_{ik} + Q_{ik}^{*00} - \\ - Q_{il}^{*01} (2\pi\delta_{lp} + Q_{lp}^{*11})^{-1} Q_{pk}^{*10}) \psi_{ok} = \\ = \frac{\omega^2}{g} (U_{ik}^{*00} - Q_{il}^{*01} (2\pi\delta_{lp} + Q_{lp}^{*11})^{-1} U_{pk}^{*10}) \psi_{ok}. \end{aligned} \quad (13)$$

У матричних виразах використовується правило сумування Ейнштейна.

3.1. Обчислення діагональних елементів

Діагональні елементи матриць (12) є сингулярними інтегралами, оскільки функція Гріна та її нормальна похідна у цих точках не визначені. В аксіально-симетричному випадку, який і розглядається в даному дослідженні, функції Гріна виражаються через повні еліптичні інтеграли першого та другого роду [5]. Для обчислення інтегралів з такими особливостями використовувалося розкладання повного еліптичного інтеграла першого роду поблизу сингулярної точки [6]

$$\begin{aligned} K(m) &= \frac{2}{\pi} \ln \frac{1}{m'} + \\ &+ \frac{4}{\pi} \int_0^1 \frac{1}{(1-x^2)(1-m'^2 x^2)} \ln \frac{1}{x} dx. \end{aligned} \quad (14)$$

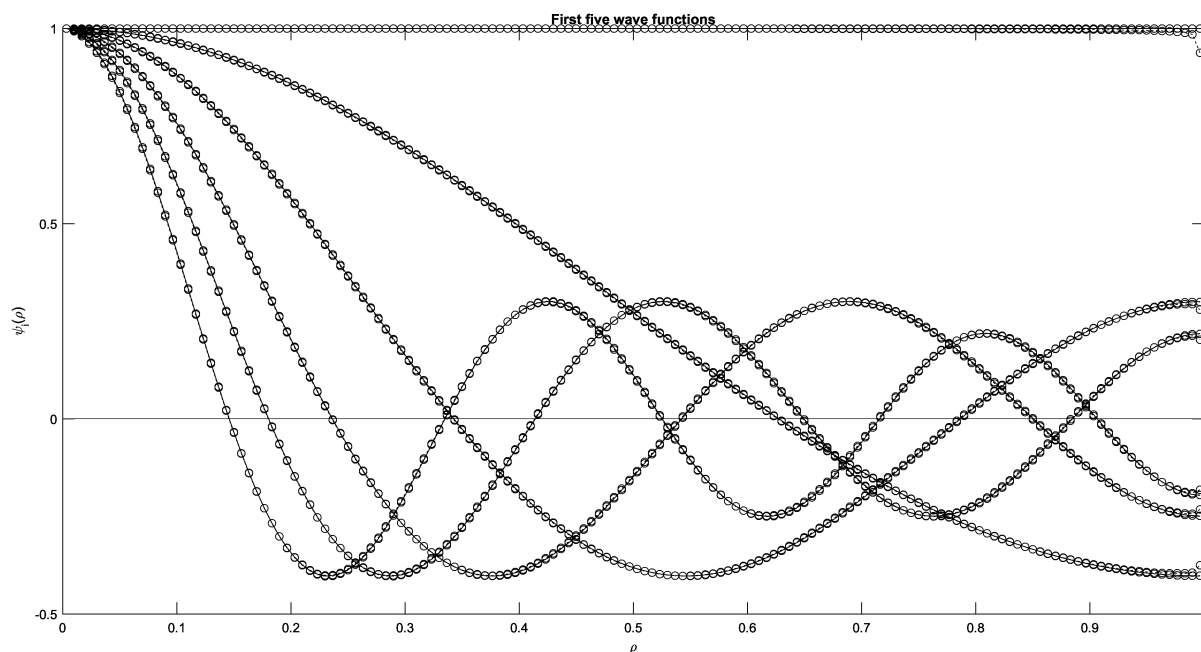


Рис. 2. Порівняння аналітичного розв'язку та чисельного результату

Тобто обчислення діагональних елементів перетворилося на обчислення інтегралів з логарифмічною особливістю, для яких можна використовувати квадратурні формули з коренями ортогональних многочленів з логарифмічною вагою у вузлових точках [6].

4. Чисельні результати

Для перевірки запропонованого методу були обчислені моди коливань для циліндричного резервуара, частково заповненого рідиною, з параметрами $R = 1$ та $H = 2$. Ця задача має наступний аналітичний розв'язок [7]:

$$\begin{aligned} \frac{\omega_k^2}{g} &= \frac{\mu_k}{R} \operatorname{th} \left(\frac{\mu_k H}{R} \right) \\ \psi_k &= J_0 \left(\frac{\mu_k \rho}{R} \right) \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k H}{R} \right), \end{aligned} \quad (15)$$

де μ_k – k -й корінь функції Бесселя першого порядку.

Порівняння аналітичного розв'язку з чисельним результатом для 150 граничних елементів наведено на рис. 2. Аналітичний розв'язок зображено неперервною лінією, а чисельний – пунктиром.

Висновки

У даній роботі представлено використання методу граничних елементів до задач вільних коливань оболонок обертання, частково заповнених рідиною. Отримано матричне рівняння, що розв'язується у вигляді спектра власних векторів та власних частот коливань. Наведено спосіб обчислення діагональних елементів, які є сингулярними інтегралами з логарифмічним ядром. Чисельні результати гарно збігаються з аналітичним рішенням для випадку циліндра.

У майбутніх дослідженнях автори планують проаналізувати вплив зовнішніх нестационарних сил на

систему, зокрема вертикальної періодичної сили для дослідження хвиль Фарадея у лінійному наближенні.

Перелік використаних джерел

1. Ravnik J., Strelnikova E., Gnitko V., Degtyarev K., Ogorodnyk U. BEM and FEM analysis of fluid-structure interaction in a double tank Engineering Analysis with Boundary Elements. – vol. 67 – pp. 13-25. – 2016.
2. Gnitko V., Degtyariy K., Naumenko V., Strelnikova E. BEM and FEM analysis of the fluid-structure Interaction in tanks with baffles Int. Journal of Computational Methods and Experimental Measurements. – vol. 5(3) – pp. 317-128 – 2017.
3. Gnitko V., Degtyariy K., Naumenko V., Strelnikova E. Coupled BEM And FEM Analysis of fluid-structure interaction in dual compartment tanks Int. Journal of Computational Methods and Experimental Measurements. – vol. 6(6) – pp. 976-988 – 2018.
4. Gnitko V., Degtyariy K., Karaev A., Strelnikova E. Multi-domain boundary element method for axisymmetric problems in potential theory and linear isotropic elasticity WIT Transactions on Engineering Sciences. – vol. 122 – WITPress – doi: 10.2495/BE410021 – pp. 13-25. – 2019.
5. Brebbia C. A, Telles J. C.F, Wrobel L. C. Boundary element techniques: theory and applications in engineering – Springer-Verlag, 1984.
6. Караєв А. О., Стрельникова О. О. Сингулярні інтеграли в аксіально-симетричних задачах теорії потенціалу Прикладні питання математичного моделювання. – 1 – с. 10-18. – 2018.
7. Ibrahim R. A. Liquid Sloshing Dynamics – Cambridge University Press, 2005.